

高二数学综合测试卷

一、选择题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(a^2 + c^2 - b^2)\tan B = \sqrt{3}ac$, 则角 B 的值为()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

2. 曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 + x$ 在点 $(1, \frac{4}{3})$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积为()

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

3. 已知函数 $f(x) = 2\ln x + 8x$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 的值为()

- A. -20 B. -10 C. 10 D. 20

4. 若函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在点 $x = x_0$ 处的瞬时变化率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 x_0 的值是()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 3

5. 已知物体做自由落体运动的位移方程为 $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, 其中 $g = 9.8\text{m/s}^2$, 位移 s 的单位:m, 时间 t 的

单位:s, 若 $v = \frac{s(1+\Delta t) - s(1)}{\Delta t}$, 当 Δt 趋于 0 时, v 趋近于 9.8m/s , 则 9.8m/s 是()

- A. 物体从 0s 到 1s 这段时间的平均速度 B. 物体从 1s 到 $(1+\Delta t)$ s 这段时间的平均速度
C. 物体在 $t=1$ s 这一时刻的瞬时速度 D. 物体在 $t=\Delta t$ s 这一时刻的瞬时速度

6. 已知 $f(x) = x^2 + 2xf'(1)$, 则 $f'(0)$ 等于()

- A. 0 B. -4 C. -2 D. 2

7. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_8 = 4$, 函数 $f(x) = x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_8)$, 则 $f'(0) =$ ()

- A. 2^6 B. 2^9 C. 2^{12} D. 2^{15}

8. 直线 $y = kx + 1$ 与曲线 $y = x^3 + ax + b$ 相切于点 $A(1, 3)$, 则 $2a + b$ 的值等于()

- A. 2 B. -1 C. -2 D. 1

二、多项选择题

9. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (m, 1) (m < 0)$, 且向量 \vec{b} 满足 $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$, 则()

- A. $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ B. $(2\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$

C. 向量 $2\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 2\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$ D. 向量 \vec{a} 在 \vec{b} 方向上的投影为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n (S_n \neq 0)$, 且满足 $a_n + 4S_{n-1}S_n = 0 (n \geq 2), a_1 = \frac{1}{4}$, 则下列说法正确的

是()

- A. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{1}{4n}$ B. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{4n(n+1)}$

C. 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列

D. 数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 为递增数列

11. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数, 若 $f'(x) > 0$, 且 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} (x_1 \neq x_2), f(x_1) + f(x_2) < 2f(\frac{x_1 + x_2}{2})$

则下列各项正确的是()

A. $f(2) < f(e) < f(\pi)$

B. $f'(\pi) < f'(e) < f'(2)$

C. $f'(2) < f(3) - f(2) < f'(3)$

D. $f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 右顶点为 A , 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A , 圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 则有()

A. 渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$

B. 渐近线方程为 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

C. $\angle MAN = 60^\circ$

D. $\angle MAN = 120^\circ$

三、填空题

13. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_{10}a_{11} + a_9a_{12} = 2e^5$, 则

$\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_{20} =$ _____.

14. 已知 $a > 0, b > 0$, 方程为 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ 的曲线关于直线 $ax - by - 1 = 0$ 对称, 则 $\frac{3a+2b}{ab}$ 的最小值为_____.

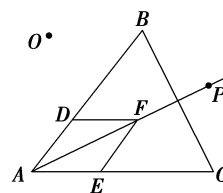
15. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 - 4n + 1} =$ _____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x + 2y + 3 = 0$ 平行, 则 $a + b$ 的值是_____.

17. 如图所示, O 是平面内一定点, A, B, C 是平面

内不共线的三点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right)$,

$\lambda \in [0, +\infty)$, 则点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的_____心.



四、解答题

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $(\sqrt{2}a - c)\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, (n+1)a_n - na_{n+1} = 1, n \in N^*$.

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{\frac{1}{a_n(a_n-1)}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{1}{3}$.

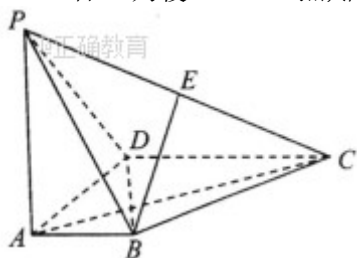
20. 若不等式 $(1-a)x^2 - 4x + 6 > 0$ 的解集是 $\{x | -3 < x < 1\}$.

(1) 解不等式 $2x^2 + (2-a)x - a > 0$.

(2) 当 b 为何值时, $ax^2 + bx + 3 \geq 0$ 的解集为 R ?

21. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp AB$, $AB \parallel DC$, $AD = DC = AP = 2$, $AB = 1$, 点 E 为棱 PC 的中点.

- (1) 证明: $BE \perp DC$;
- (2) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值;
- (3) 若 F 为棱 PC 上一点, 满足 $BF \perp AC$, 求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值.



22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 点 $M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上

- (1) 求椭圆 C 的方程.
- (2) 若不过原点 O 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点, 与直线 OM 相较于点 N , 且 N 是线段 AB 的中点, 求 ΔOAB 面积的最大值.